Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа
07.03.2020.

IV разред

1. Саша је на папиру написао нулу, а затим редом све природне бројеве од 1 до 2020. Ако је у сваком минуту написао тачно 77 цифара, колико му је после сат и по времена писања преостало бројева да напише?

2. Прецртај слику на папир који ћеш предати. Попуни празна поља у магичним квадратима.

2		
9		

„+“

20	12	

„=“

	17	5
		26

Збир бројева у одговарајућим пољима прва два квадрата треба да буде једнак броју у одговарајућем пољу трећег квадрата.

3. Катарина је за свој нови стан купила фрижидер, телевизор и машину за прање. За све три ове ствари дала је укупно 80 000 динара. Колико кошта сваки од ових уређаја, ако је фрижидер за 8 900 динара скупљи од машине за прање, а телевизор за 6 200 динара јефтинији од фрижидера?

4. Ако једну страницу квадрата повећамо два пута, а другу три пута, добићемо правоугаоник површине 96 cm^2. За колико је обим добијеног правоугаоника већи од обима полазног квадрата?

5. Лифт у једној двадесетоспратници може да изврши само следеће две наредбе: да се подигне за 8 спратова и да се спусти за 13 спратова. Лифт не може да крене навише ако изнад њега нема бар 8 спратова, нити наниже ако испод њега нема бар 13 спратова. Запиши како се лифтом може:

а) спустити са 20. спрата на приземље?
б) стићи са 8. на 13. спрат?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

IV РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Саша је написао $10 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 1021 = 6974$ цифре [**10 поена**]. После сат и по написао је $90 \cdot 77 = 6930$ цифара [**2 поена**], односно преостало му је да запише још $6974 - 6930 = 44$ цифре [**6 поена**], односно преостало му је да напише још $44 : 4 = 11$ бројева [**2 поена**].

2. Сваки тачно уписан број **по 1 поен**.

2	**7**	**6**
9	**5**	**1**
4	**3**	**8**

„+“

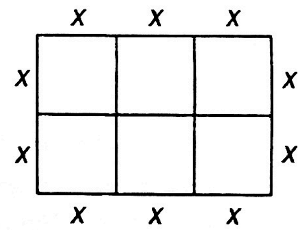
6	**16**	**14**
20	12	**4**
10	**8**	**18**

„=“

8	**23**	**20**
29	17	5
14	**11**	26

3. Ако цену машине за прање означимо са x, онда је цена фрижидера $x + 8\,900$, а телевизора $x + 2\,700$ [**5 поена**]. Решавањем једначине или другом пригодном методом добијамо да је $x = 22\,800$, односно да је цена машине за прање 22 800 динара [**5 поена**], фрижидера 31 700 динара [**5 поена**], а телевизора 25 500 динара [**5 поена**].

4. (**МЛ 54/2**) Ако са x означимо страницу квадрата, правоугаоник ће изгледати као на слици, тј. биће састављен од 6 квадрата. Површина једног квадрата биће $96 cm^2 : 6 = 16 cm^2$ [**5 поена**], а његова страница $x = 4$ cm [**5 поена**]. Обим квадрата биће $4 \cdot x = 16$ cm [**4 поена**], а правоугаоника $10 \cdot x = 40$ cm [**4 поена**], па је обим правоугаоника за 24 cm већи од обима квадрата [**2 поена**].



5. Лифтом се у оба случаја само на један начин може стићи од почетног до жељеног спрата.

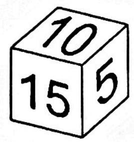
а) 20 → 7 → 15 → 2 → 10 → 18 → 5 → 13 → приземље [**10 поена**].
б) 8 → 16 → 3 → 11 → 19 → 6 → 14 → 1 → 9 → 17 → 4 → 12 → 20 → 7 → 15 → 2 → 10 → 18 → 5 → 13 [**10 поена**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
07.03.2020.

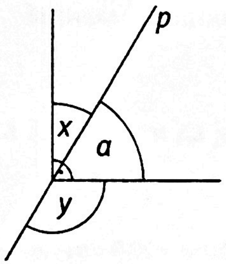
V разред

1. Коцка приказана на слици има написан по један природан број на свакој страни. Производи бројева на супротним странама коцке су једнаки. Одреди најмањи могући збир свих шест природних бројева написаних на странама коцке.



2. Одреди све природне бројеве мање од 1000 који се завршавају нулом и једнаки су производу 4 различита проста броја?

3. Права p, која пролази кроз теме правог угла, формира углове као на слици. Ако је збир углова x и y једнак углу од 163° 14′, одреди меру упоредног угла углу α.



4. Одреди природан број n тако да важи $\frac{3}{n+1} < \frac{7}{2020} < \frac{3}{n}$.

5. Никола је у тачном примеру сабирања заменио једнаке цифре истим словом, а различите цифре различитим словима и добио ребус:

$$M + A + T + E + M + A + T + И + K + A = \overline{EE}.$$

Која је највећа цифра коју може заменити слово E?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 53/5**) Како је НЗС(5, 10, 15) = 30 [**5 поена**], збир ће бити најмањи када се наспрам броја 15 налази 2, наспрам 10 налази 3 и наспрам 5 налази 6 [**10 поена**]. Тражени збир је 10 + 3 + 5 + 6 + 15 + 2 = 41 [**5 поена**].

2. Да би се производ 4 проста броја завршавао нулом, неопходно је да су међу њима бројеви 2 и 5 [**5 поена**]. Производ преостала два броја је мањи од 100 [**5 поена**], па су могућности за преостала два проста броја: 3 и 7; 3 и 11; 3 и 13; 3 и 17; 3 и 19; 3 и 23, 3 и 29, 3 и 31, 7 и 11; 7 и 13. Дакле, тражени бројеви су: 210, 330, 390, 510, 570, 690, 870, 930, 770 и 910 [**10 поена**. За сваки изостављен број одузети по 1 поен].

3. Како је $x = 90° - \alpha$ и $y = 180° - \alpha$, то је $90° - \alpha + 180° - \alpha = 163°\ 14'$ [**5 поена**], одакле је $\alpha = 53°\ 23'$ [**10 поена**] и $180° - \alpha = 126°\ 37'$ [**5 поена**].

4. Из дате релације се добија $\frac{n+1}{3} > \frac{2020}{7} > \frac{n}{3}$ [**5 поена**], односно $n+1 > \frac{6060}{7} > n$ [**5 поена**]. Како је $\frac{6060}{7} = 865\frac{5}{7}$, то је $n = 865$ [**10 поена**].

5. (**МЛ 54/2**) Дата једнакост се може написати у облику $2M + 3A + 2T + И + K = 10E$ [**5 поена**]. Цифра E ће бити највећа ако је $A = 9$, $M = 8$ (или 7) и $T = 7$ (или 8) [**5 поена**]. Тада је $И + K$ највише 11, па би збир био највише 68, што повлачи да је $E \le 6$ [**5 поена**]. Ако је $И = 1$ и $K = 2$, почетни збир је 66, па је највећа цифра коју E може заменити 6 [**5 поена**].

Напомена: Ако ученик само констатује да је E једнако 6, без образложења зашто не може већи број бодовати са 10 поена.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

07.03.2020.

VI разред

1. Одреди бројеве a, b и c ако се зна да је њихов збир већи од броја a за $\frac{5}{2}$, од броја b за $\frac{59}{6}$ и од броја c за $\frac{5}{3}$.

2. Колико има неподударних троуглова са целобројним дужинама страница (у центиметрима) обима 20 cm? Запиши дужине страница свих тих троуглова.

3. Збир двоцифрених бројева $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ дељив је са 33. Докажи да је и четвороцифрени број $\overline{abcd}$ дељив са 33.

4. Колико има седмоцифрених палиндрома чији је производ цифара паран? За број кажемо да је палиндром ако се чита исто и са леве и са десне стране, на пример 2014102.

5. Нека је D тачка на основици BC једнакокраког троугла ABC таква да је мера угла BAD једнака 2020 минута и E тачка на краку AC таква да је $AE = AD$. Одреди меру угла CDE.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Ако саберемо леве и десне стране једнакости

$$a+b+c=a+\frac{5}{2},\quad a+b+c=b+\frac{59}{6},\quad a+b+c=c+\frac{5}{3},$$

добијамо да је $2(a+b+c) = 14$, односно $a+b+c = 7$ [**11 поена**].

Заменом добијене вредности у прве три једначине добијамо $a=4\frac{1}{2}$,

$b=-2\frac{5}{6}$, $c=5\frac{1}{3}$ [Свако тачно решење **по 3 поена**.]

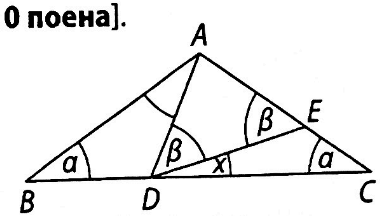
2. Означимо са a, b, c дужине страница троугла, при чему је $a \le b \le c$. Бројеви a, b, c морају да задовољавају услов да је сваки мањи од збира друга два, а већи од апсолутне вредности њихове разлике [**4 поена**]. Водећи рачуна о томе и услову $a + b + c = 20$ добијамо све могућности: (2, 9, 9), (3, 8, 9), (4, 7, 9), (4, 8, 8), (5, 6, 9), (5, 7, 8), (6, 6, 8), (6, 7, 7) [свако тачно решење **по 2 поена**. За свако нетачно решење, на пример (2, 3, 15) одузети 2 поена. Укупан број поена не може бити негативан].

3. $\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}$ [**5 поена**] $=99\overline{ab}+(\overline{ab}+\overline{cd})$ [**10 поена**].

Како $33\,|\,(\overline{ab}+\overline{cd})$ и $33\,|\,99$ то је и број $\overline{abcd}$ дељив са 33 [**5 поена**].

4. (**МЛ 54/2**) Седмоцифрени палиндроми су облика $\overline{abcdcba}$ па их укупно има колико има различитих бројева облика $\overline{abcd}$, односно 9 000 [**5 поена**]. Да бисмо израчунали колико има палиндрома чији је производ цифара паран, од укупног броја седмоцифрених палиндрома одузећемо број оних чији је производ цифара непаран. Ако је производ цифара непаран све цифре морају бити непарне, а таквих палиндрома има $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ [**5 поена**]. Дакле, тражени број палиндрома је $9\,000 - 625 = 8\,375$ [**10 поена**].

5. Троуглови ABC и ADE су једнакокраки па се могу увести ознаке $\measuredangle ABC = \measuredangle ACD = \alpha$, $\measuredangle ADE = \measuredangle AED = \beta$, $\measuredangle CDE = x$. Збир два унутрашња угла једнак је несуседном спољашњем углу, па је $x + \alpha = \beta$ и $\alpha + 2020' = \beta + x$ [**10 поена**]. Заменом вредности за β у другој једначини добијамо да је $x = 1010' = 16°\,50'$ [**10 поена**].



Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
07.03.2020.

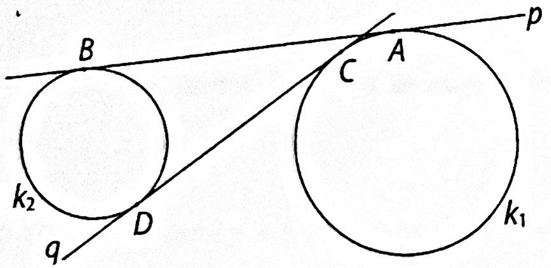
VII разред

1. Да ли постоје природни бројеви x, y и z, такви да је $4^x + 9^y = 11^z$? Образложи одговор.

2. Колико има петоцифрених природних бројева у чијем запису се појављује бар једна парна и бар једна непарна цифра?

3. Из скупа {2, 3, 4, 5} бирају се три различита броја p, q и r. На колико начина се може постићи да број $p^{\left(q^r\right)}$ буде дељив са 8?

4. Права p додирује кругове k_1 и k_2 у тачкама A и B, а права q у тачкама C и D (види слику). Ако је полупречник круга k_1 једнак 3 cm, а полупречник круга k_2 једнак 2 cm, одреди вредност израза $AB^2 - CD^2$.



5. У правоуглом троуглу ABC, са правим углом у темену C, важи $BC = 3AC$. Нека су M и N тачке катете BC такве да је $BM = MN = NC$ и K средиште хипотенузе AB. Израчунај меру угла MKN.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

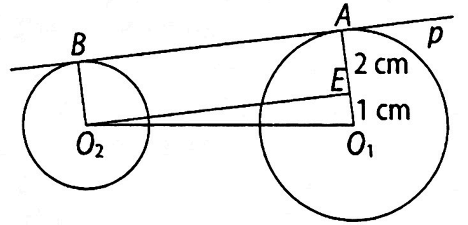
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

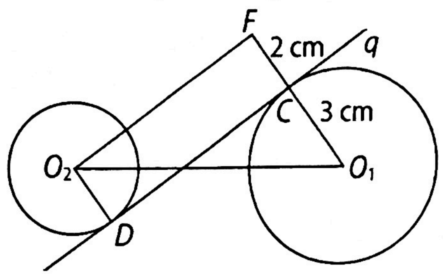
1. Бројеви облика 4^x завршавају се цифром 4 или 6 [**4 поена**], бројеви облика 9^y цифрама 9 или 1 [**4 поена**], а бројеви облика 11^z цифром 1 [**4 поена**]. Дакле, збир $4^x + 9^y$ може се завршавати неком од цифара 3, 5 или 7 [**4 поена**] и не може бити једнак 11^z [**4 поена**].

2. Од укупног броја петоцифрених бројева одузећемо оне које у запису имају само парне и само непарне цифре. Укупно има 90 000 петоцифрених бројева [**2 поена**]. Петоцифрених бројева чије су све цифре парне има $4 \cdot 5^4 = 2\,500$ [**6 поена**], а чије су све цифре непарне $5^5 = 3\,125$ [**6 поена**]. Бројева у чијем запису је јавља бар једна парна и бар једна непарна цифра има $90\,000 - 2\,500 - 3\,125 = 84\,375$ [**6 поена**].

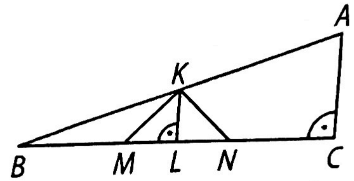
3. (**МЛ 53/5**) Да би број $p^{\left(q^r\right)}$ био дељив са 8 неопходно је да буде $p = 2$ [**4 поена**] или $p = 4$ [**4 поена**]. У оба случаја бројеви q и r се од преостала три броја скупа {2, 3, 4, 5} могу изабрати на $2 \cdot 3 = 6$ начина [**8 поена**]. Дакле, укупан број тражених бројева је $6 + 6 = 12$ [**4 поена**].

4. У I случају (слика лево) применом Питагорине теореме у троуглу O_2O_1E налазимо $AB^2 = O_2E^2 = O_1O_2^2 - 1^2$ [**6 поена**]. У II случају (слика десно) применом Питагорине теореме у троуглу O_2O_1F налазимо $CD^2 = O_2F^2 = O_1O_2^2 - 5^2$ [**6 поена**]. $AB^2 - CD^2 = 24\text{ cm}^2$ [**8 поена**].





5. Нека је тачка L средиште дужи BC. Тада је дуж KL средња линија троугла BCA, па је $KL \perp BC$ и $KL = \frac{1}{2}AC = ML = LN$ [**10 поена**]. Дакле, троуглови LMK и LNK су једнакокрако-правоугли, па је $\measuredangle MKL = \measuredangle NKL = 45°$ [**5 поена**] и $\measuredangle MKN = 90°$ [**5 поена**].



Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

07.03.2020.

VIII разред

1. Мањи дијагонални пресек правилне шестостране пирамиде је једнакостранични троугао обима $18\sqrt{3}$ cm. Израчунај запремину те пирамиде.

2. За годину кажемо да је *срећна* ако су све цифре које се користе за записивање броја различите узастопне цифре. На пример, последња *срећна* година је била 2013.
а) Која је прва следећа срећна година?
б) Колико има срећних година у трећем миленијуму?

3. Израчунај запремину правилне осмостране призме чији је највећи дијагонални пресек квадрат странице 12 cm.

4. Одреди све вредности целог броја m за које је број $\dfrac{m^2+2016}{|m|+2}$ такође цео.

5. Одреди све просте бројеве p и q за које је број $p^2 + q^2 + 1$ потпун квадрат.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Означимо са a основну ивицу пирамиде. Тада је краћа дијагонала правилног шестоугла $a\sqrt{3} = \frac{1}{3}\cdot 18\sqrt{3}$, одакле је $a = 6$ cm [**5 поена**]. Висина пирамиде је $H = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm [**10 поена**], а запремина $V = 108\sqrt{6}$ cm³ [**5 поена**].

2. а) 2031 [**5 поена**]; б) У запису срећне године трећег миленијума могући су следећи избори цифара: 0, 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4 или 2, 3, 4, 5 [**4 поена**]. При томе је цифра 2 увек на првом месту [**3 поена**]. За сваки избор постоји 6 могућности за редослед друге, треће и четврте цифре [**4 поена**]. Дакле, тражени број је $3 \cdot 6 = 18$ [**4 поена**].

3. Висина призме и најдужа дијагонала основе су 12 cm [**2 поена**]. Правилни осмоугао се састоји од четири подударна делтоида чије су дијаголане 6 cm и $6\sqrt{2}$ cm [**10 поена**], па је површина основе $B = 72\sqrt{2}$ cm² [**6 поена**], а запремина призме је $V = 864\sqrt{2}$ cm³ [**2 поена**].

4. $\dfrac{m^2+2016}{|m|+2} = \dfrac{m^2-4+2020}{|m|+2} = |m| - 2 + \dfrac{2020}{|m|+2}$ [**5 поена**]. Полазни број је цео ако $(|m|+2) \mid 2020$. Како је $2020 = 1 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, његови делиоци су 1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010 и 2020 (има их 12) [**4 поена**]. $|m|+2$ не може бити једнако 1. Ако је $|m|+2=2$ мора бити $m = 0$, а у свим осталим случајевима постоје по две могућности за m. Дакле, оваквих бројева m има 21 и они су: 0, 2, −2, 3, −3, 8, −8, 18, −18, 99, −99, 200, −200, 402, −402, 503, −503, 1008, −1008, 2018, −2018 [свака 2 тачно записана решења **по 1 поен**. Ако је ученик записао сва решења **11 поена**].

5. (**МЛ 54/1**) Нека је најпре $p = 2$. Тада треба да важи $5 + q^2 = n^2$, тј. $n^2 - q^2 = (n-q)(n+q) = 5$, одакле је $n + q = 5$ и $n - q = 1$, тј. $q = 2$ $(n = 3)$ [**5 поена**]. Претпоставимо сада да важи $p > 2$ и $q > 2$. За квадрат непарног броја важи $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$, па је остатак при дељењу са 4 непарног броја једнак 1 [**5 поена**]. У релацији $p^2 + q^2 + 1 = n^2$ сви бројеви p, q, 1 и n су непарни [**5 поена**], па је остатак при дељењу са 4 леве стране једнакости 3, а десне 1, што је немогуће [**5 поена**]. Дакле, једино решење задатка је $p = q = 2$.